

Correction Devoir maison n°2

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n + 1}$.

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \left\{ u_n = \frac{2}{2n + 1} \right\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$. Or d'après l'énoncé, $u_0 = 2$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n = \frac{2}{2n + 1}$)

On utilise la définition de la suite, à savoir $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + u_n} \\ &= \frac{\frac{2}{2n + 1}}{1 + \frac{2}{2n + 1}} \\ &= \frac{2}{2n + 1} \times \frac{2n + 1}{2n + 1 + 2} \\ &= \frac{2}{2(n + 1) + 1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des propositions (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n + 1}$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + 2u_n}}{2}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leq 1$.

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n \leq 1\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_1 s'écrit $0 < u_1 \leq 1$. Or d'après l'énoncé, $u_1 = \frac{\sqrt{1 + 2 \times 0}}{2} = \frac{1}{2}$. La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $0 < u_n \leq 1$)

On utilise la définition de la suite, à savoir $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + 2u_n}}{2}$. On a d'un côté

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq 1 &\implies 1 < 1 + 2u_n \leq 3 \\ &\implies 1 < \sqrt{1 + 2u_n} \leq \sqrt{3} \\ &\implies \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{1 + 2u_n}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\implies 0 < u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des propositions (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 2 - Inspiré EML 1995

1. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln(1+x)$$

(a) La fonction $x \rightarrow x$ est définie sur \mathbb{R} . La fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ est définie pour

$$1+x > 0 \iff x > -1$$

Ainsi, le domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

(b) Le domaine de définition de la fonction f n'est pas symétrique.

La fonction n'a donc pas de parité

(c) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty .$$

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty .$$

(d) La fonction f est dérivable en tant que produit de fonction dérivable sur $] -1; +\infty[$. On calcule

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

(e) Afin de construire le tableau de variations, on va trouver le signe de la dérivée par disjonction de cas :

1er cas : $x > 0$ Dans ce cas, on a à la fois $1+x > 1$ donc $\ln(1+x) > 0$ et $\frac{x}{1+x} > 0$ donc

$$\forall x > 0, f'(x) > 0.$$

2ème cas : $-1 < x < 0$ Dans ce cas, on a à la fois $1+x < 1$ donc $\ln(1+x) < 0$ et $\frac{x}{1+x} < 0$ donc

$$\forall x > 0, f'(x) < 0.$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	-1	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f	$+\infty$	0	$+\infty$

2. (a) On résout

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff x \ln(1+x) = x \\
 &\iff x \ln(1+x) - x = 0 \\
 &\iff x(\ln(1+x) - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(1+x) - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(1+x) = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+1 = e \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = e-1
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $f(x) = x$ est $\mathcal{S} = \{0, e-1\}$.

(b) Par les mêmes calculs que précédemment, on a

$$f(x) \geq x \iff x(\ln(1+x) - 1) \geq 0.$$

Or, $(\ln(1+x) - 1) \geq 0 \iff x \geq e - 1$. D'après le tableau de signe

x	-1	0	$e - 1$	$+\infty$
Signe de x	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $\ln(1+x) - 1$	$-$	0	$-$	$+$
Signe de $f(x) - x$	$+$	0	$-$	$+$

L'ensemble des solutions de $f(x) \geq x$ est $\mathcal{S} =]-1; 0] \cup [e - 1; +\infty[$.

3. On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[$:

(a) — On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \in]0; e - 1[\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 \in]0; e - 1[$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n \in]0; e - 1[$)

On a

$$\begin{aligned} u_n \in]0; e - 1[&\iff 0 < u_n < e - 1 \\ &\implies f(0) < f(u_n) < f(e - 1) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\\ &\implies 0 < u_{n+1} < e - 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[}$.

(b) On a montré (question 2.b) que $\forall x \in]0; e - 1[, f(x) \leq x$ et (question 3.a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; e - 1[$.
Donc

$$f(u_n) \leq u_n \implies u_{n+1} \leq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

4. (a) On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1$:

— On cherche à montrer les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n > e - 1\}$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $u_0 > e - 1$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n > e - 1$)

On a

$$\begin{aligned} u_n > e - 1 &\implies f(u_n) > f(e - 1) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\\ &\implies u_{n+1} > e - 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1}$.

(b) On a montré (question 2.b) que $\forall x > e - 1, f(x) \geq x$ et (question 4.a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1$. Donc

$$f(u_n) \geq u_n \implies u_{n+1} \geq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

Exercice 3 - Inspiré d'ECRICOME

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Deux sociétés sont utilisées : la société A et la société B : La probabilité pour que la société A livre le colis en retard est de 0,1 alors que la probabilité que la société B livre le colis en retard est de 0,2 : On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données.

Situation 1

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A sinon.

1. On note les évènements

- R : "Le colis arrive en retard"
- A : L'entreprise utilise la société A"
- B : L'entreprise utilise la société B"

La famille (A, B) forme un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)P_A(R) + P(B)P_B(R) \\ &= 0,4 \times 0,1 + 0,6 \times 0,2 \\ &= 0,04 + 0,12 \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

La probabilité que le colis arrive en retard est de 0,16.

2. On cherche la probabilité qu'un colis ait été livré par la société A sachant qu'il est arrivé en retard. D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} P_R(A) &= \frac{P(A)}{P(R)} P_A(R) \\ &= \frac{0,4}{0,16} \times 0,1 \\ &= \frac{0,04}{0,16} \\ &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La probabilité qu'un colis ait été livré par la société A sachant qu'il est arrivé en retard est $\frac{1}{4}$.

Situation 2

Dans cette situation, il est décidé que le premier jour, l'entreprise utilise la société B. Puis si au jour n ($n \in \mathbb{N}^*$), le colis arrive en retard, alors l'entreprise choisit la société A au jour $n + 1$, et sinon, elle choisit la société B. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'évènement R_n : " le colis arrive en retard au jour n", et on note $p_n = P(R_n)$:

1. On cherche la probabilité que le colis arrive en retard au premier jour. On sait que l'entreprise choisit la société B le premier jour. Donc

$$p_1 = 0,2.$$

2. Si le colis est arrivé en retard au jour n alors l'entreprise choisit la société A. Ce qui signifie :

$$P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,1.$$

Si le colis est arrivé à l'heure au jour n alors l'entreprise choisit la société B . Ce qui signifie :

$$P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0, 2.$$

On sait également que $P(\overline{R_n}) = 1 - p_n$. Comme $(R_n, \overline{R_n})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ \iff p_{n+1} &= p_n \times 0, 1 + (1 - p_n) \times 0, 2 \\ \iff p_{n+1} &= -0, 1p_n + 0, 2 \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -0, 1p_n + 0, 2.}$$

3. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x = -0, 1x + 0, 2 &\iff 1, 1x = 0, 2 \\ &\iff x = \frac{0, 2}{1, 1} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

On pose la suite $v_n = p_n - \frac{2}{11}$. On montre que cette suite est géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{11} \\ &= -\frac{1}{10}p_n + \frac{2}{10} - \frac{2}{11} \\ &= -\frac{1}{10}p_n + \frac{22 - 20}{110} \\ &= -\frac{1}{10}p_n + \frac{2}{110} \\ &= -\frac{1}{10}\left(p_n - \frac{2}{11}\right) \\ &= -\frac{1}{10}v_n \end{aligned}$$

De plus $v_1 = p_1 - \frac{2}{11} = \frac{2}{10} - \frac{2}{11} = \frac{2}{110} = \frac{1}{55}$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{55} \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

On a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2}{11} + \frac{1}{55} \times \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}.}$$

4. Programme qui affiche les n premiers termes de la suite (plusieurs façon de faire sont possibles)

```
n = input("Entrez un entier n")
p = 0.2
disp("La probabilité de retard au jour 1 est " + string(p) + ".")

for k = 2:n
    p = -0.1*p + 0.2
    disp("La probabilité de retard au jour " + string(k) + " est " + string(p) + ".")
end
```

Situation 3

Finalement, l'entreprise décide d'utiliser les sociétés en fonction de leurs précédentes réussites. Pour cela ils utilisent une urne contenant des boules rouges et vertes. Chaque jour, l'entreprise tire une boule. Si la boule tirée est rouge, l'entreprise utilise la société A. Sinon elle utilise l'entreprise B. Enfin,

- Au jour 1, on a 1 boule rouge et 1 boule verte.
- Si la société A est en retard, on rajoute une boule verte dans l'urne.
- Si la société B est en retard, on rajoute une boule rouge dans l'urne.

On notera les évènements

- R_n : "Le colis arrive en retard au jour n ".
- A_n : "On choisit la société A au jour n ".
- B_n : "On choisit la société B au jour n ".

1. Les évènements A_n et B_n sont complémentaires.

2.
$$P(A_1) = P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

3. On calcule la probabilité de A_2 sachant $A_1 \cap R_1$. Si la société A est en retard au premier jour, alors l'urne contient désormais 2 boules vertes et 1 boule rouge. Alors

$$P_{A_1 \cap R_1}(A_2) = \frac{1}{3}.$$

4. On cherche la probabilité de l'évènement $A_1 \cap A_2$. La famille $(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1 \cap A_2 \cap R_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{R_1}) \\ &= P(A_1 \cap R_1)P_{A_1 \cap R_1}(A_2) + P(A_1 \cap \overline{R_1})P_{A_1 \cap \overline{R_1}}(A_2) \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} \text{— } P(A_1 \cap R_1) &= P(A_1)P_{A_1}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \\ \text{— } P(A_1 \cap \overline{R_1}) &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{R_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20} \\ \text{— } P_{A_1 \cap R_1}(A_2) &= \frac{1}{3}, \quad P_{A_1 \cap \overline{R_1}}(A_2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{60} + \frac{9}{40} \\ &= \frac{2 + 27}{120} = \frac{29}{120} \end{aligned}$$

On a finalement,

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{29}{120}.$$

5. Afin de calculer la probabilité de A_2 , on utilise le système complet d'évènement $(A_1 \cap R_1, A_1 \cap \overline{R_1}, B_1 \cap R_1, B_1 \cap \overline{R_1})$ et la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap R_1)P_{A_1 \cap R_1}(A_2) + P(A_1 \cap \overline{R_1})P_{A_1 \cap \overline{R_1}}(A_2) + P(B_1 \cap R_1)P_{B_1 \cap R_1}(A_2) + P(B_1 \cap \overline{R_1})P_{B_1 \cap \overline{R_1}}(A_2)$$

On a également

$$\begin{aligned} - P(B_1 \cap R_1) &= P(B_1)P_{B_1}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10} \\ - P(B_1 \cap \overline{R_1}) &= P(B_1)P_{B_1}(\overline{R_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} = \frac{2}{5} \\ - P_{B_1 \cap R_1}(A_2) &= \frac{2}{3}, \quad P_{B_1 \cap \overline{R_1}}(A_2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{60} + \frac{9}{40} + \frac{2}{30} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{2}{120} + \frac{27}{120} + \frac{8}{120} + \frac{24}{120} \\ &= \frac{61}{120} \end{aligned}$$

En conclusion, $P(A_2) = \frac{61}{120}$, et $P(B_2) = 1 - P(A_2) = \frac{59}{120}$.